Tentamen **WISKUNDE II, 21 maart 2000**

Tijd: 3 uur

(Antwoorden dienen beargumenteerd te worden)

1.[1] In $\mathbf{R}^3$ zijn vier punten gegeven: $A = (0,2,8)$, $B = (0,10,8)$, $C = (4,0,0)$ en $D = (2,13,12)$.

(a)[5] Bepaal de Cartesische vergelijking van het vlak evenwijdig aan het vlak V door de punten B, C en D, op een afstand 2 van V en aan dezelfde kant van V als het punt A. Gebruik de volgende stappen:

1. Bepaal de Cartesische vergelijking van V.
2. Bepaal de parametervoorstelling van de lijn l door de oorsprong die V loodrecht snijdt en het snijpunt S van l en V.
3. Bepaal op l twee punten die afstand 2 tot V hebben.
4. Welke van die twee ligt aan dezelfde kant van V als A?
5. Bepaal het gevraagde vlak.

(b)[4] Bereken de inhoud van het viervlak $ABCD$($= (1/6)\times$ de inhoud van het parallellopipedum met hoekpunten A,B,C en D).

2.[1] In het volgende is $\mathbf{P}_n$ de lineaire ruimte van alle polynomen $p(t)$ met reële coëfficienten en van de graad $\leq n$ en heet het stelsel $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ de natuurlijke basis van $\mathbf{P}_n$. De afbeelding $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3$ wordt bepaald door $Tp(t) = (t+1)p'(t) + tp(t)$ voor elke $p(t) \in \mathbf{P}_2$.

(a)[2] Toon aan dat T lineair is.

(b)[3] Bepaal de matrixrepresentatie A van T ten opzichte van de natuurlijke bases van $\mathbf{P}_2$ en $\mathbf{P}_3$.

(c)[3] Toon aan: $R(A) = \{(w_0, w_1, w_2, w_3) \in \mathbf{R}^4 \mid w_0 - w_2 + 2w_3 = 0\}$

(d)[1] Bewijs met behulp van het voorgaande dat er geen polynoom $p(t)$ in $\mathbf{P}_2$ bestaat die voldoet aan de vergelijking

$$(t+1)p'(t) + tp(t) = t^3 + t^2 + t + 1.$$

3.[1] Stel A is een $n \times n$ matrix over de complexe getallen met eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en stel $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

(a)[1] Schrijf $p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots a_1\lambda + a_0$. Druk de coëfficiënten a_{n-1} en a_0 uit in (eventueel de kentallen A_{ij} van) A en in de eigenwaarden van A.

(b)[1] Bewijs: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ alle λ_i's zijn $\neq 0$.

(c)[1] Stel A is inverteerbaar. Druk de eigenwaarden van A^{-1} uit in die van A, en geef het verband aan tussen de bijbehorende eigenvectoren.

(d)[6] Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van A^{-1}, liefst zonder A^{-1} te berekenen. Toon aan dat A^{-1} diagonaliseerbaar is, bepaal een matrix C zodat $C^{-1}A^{-1}C$ een diagonaalmatrix is en bereken de inverse van C.

Z.O.Z.

4.[1,9] Beschouw het systeem van vergelijkingen

$$\begin{array}{ccccccc} ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & a+2 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & a+4 \\ x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & -1 \end{array}$$

(a) [5] Toon aan dat voor $a \neq -3$ en $a \neq 1$ het systeem precies één oplossing heeft en bepaal met de regel van Cramer de onbekende x_3.
(b)[2] Bepaal alle oplossingen als $a = -3$.
(c)[2] Bepaal alle oplossingen als $a = 1$.